

Brechung und Reflexion schneller Elektronen durch dünne Folien

H. ZEIDL und H. BAIER

Physikinstitut, Reaktorzentrum Seibersdorf, Österreich

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1988—1994 [1968]; eingegangen am 24. August 1968)

The Monte Carlo method is applied to investigate the penetration of fast electron through thin foils of matter. The "step by step method" is used. Energy loss and secondary electron emission are taken into account. As an example for the possible application of the computational program we calculated "refraction" and "reflection" of relativistic electrons on thin Al-foils. Scattering and reflection depends significantly on the energy loss of the electrons in the foil. The "mean scattering angle" of the electron beam (with respect to the foil normal) has been shown to be smaller than the angle of incidence (with respect to the foil normal). Possible experimental methods to test the predictions on mean scattering and reflection angles (as defined in this paper) are discussed.

In zahlreichen Meßverfahren der Kernphysik tritt die Vielfachstreuung von Elektronen an Atomen als unerwünschter Nebeneffekt auf. Es ergibt sich daher die Aufgabe, diesen Streuprozess sowohl theoretisch als auch praktisch zu untersuchen. Für den Spezialfall des Durchgangs schneller Elektronen durch dünne Materialschichten existieren Theorien, die diesen Vorgang gut wiedergeben¹. Freilich ist der Anwendungsbereich dieser Modelle beschränkt. So vernachlässigen sie u. a. den Energieverlust des Teilchens auf seinem Weg durch die Materieschicht, oder berücksichtigen ihn nur auf sehr grobe Weise.

Unter der Annahme zufällig verteilter Streuzentren und unter Vernachlässigung des Energieverlustes ist es gelungen, das Vielfachstreuproblem für den Elektronendurchgang durch planparallele Platten und Kugeln für eine Reihe experimentell wichtiger Anwendungen analytisch zu lösen².

Im Gegensatz zu älteren Theorien^{1, 3} unterliegt der Einfallswinkel des Teilchenstrahls keinerlei einschränkenden Bedingungen mehr.

Es sei erwähnt, daß brauchbare Formeln für die Verteilungsfunktion des Elektronentransports in mehr als einer stochastischen Variablen nur in Form der Gauß-Approximation bzw. in einfachen Modifikationen derselben vorliegen⁴.

Weiters hat man versucht, statistische Methoden und, speziell im Falle dicker Folien, eine Kombination statistischer und analytischer Verfahren zur Lösung des Vielfachstreuproblems heranzuziehen⁵⁻⁷.

¹ W. T. SCOTT, Rev. Mod. Phys. **35**, 231 [1963].

² A. Z. DOLGINOV u. Yu. N. GNEDIN, Nucl. Phys. **53**, 317 [1964]; **77**, 202 [1966].

³ G. MOLIERE, Z. Naturforsch. **3 a**, 78 [1948].

⁴ H. BAIER, Acta Physica Austr. **25**, 4, 327 [1967].

⁵ H. PAUL u. W. TATZBER, Acta Phys. Austr. **25**, 36 [1967].

Diese Verfahren haben u. a. den Vorteil, daß z. B. der Energieverlust, der zweifellos auch bei dünnen Folien meßbare Effekte hervorbringt, ohne größere Schwierigkeiten berücksichtigt werden kann. Allerdings haben alle statistischen Methoden, die notwendigerweise auf die Verwendung elektronischer Rechenmaschinen angewiesen sind, mit charakteristischen rechentechnischen Problemen zu tun⁶.

In der vorliegenden Arbeit wird der Durchgang von Elektronen durch dünne planparallele Platten nach der Monte-Carlo-Methode, unter Berücksichtigung des Energieverlustes untersucht. Die Dicke der Folie und die Energie der einfallenden Elektronen liegen so, daß es möglich ist, den Weg des Elektrons von Stoß zu Stoß zu verfolgen. Speziell interessiert uns die „Brechung“ des Elektronenstrahls⁸, falls die Elektronen schräg gegen die Folie einfallen. Dieser Effekt scheint von einiger Bedeutung für die Auswertung β -spektroskopischer Untersuchungen zu sein⁹.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit darauf, ein charakteristisches Beispiel aus der Vielfalt der möglichen Anwendungen des entwickelten Rechenprogramms zu geben.

Elektronen bestimmter Energie mögen unter fix vorgegebenem Einfallswinkel auf eine dünne planparallele Al-Folie auftreffen. Wir definieren und berechnen den „mittleren Streuwinkel“ und den „mittleren Reflexionswinkel“. In Anschluß daran diskutieren

⁶ M. J. BERGER, in: Methods in Computational Physics **1** [1963], ed. by B. ALDER, S. FERNBACH, M. ROTENBERG.

⁷ G. MEISSNER, Z. Naturforsch. **19 a**, 269 [1964].

⁸ W. BOTHE, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. **7** [1951].

⁹ I. HOFMANN u. H. BAIER, Acta Phys. Austr. **20**, 53 [1965].



tieren wir Methoden zur experimentellen Bestimmung dieser Größen.

Als weitere Anwendung unseres Rechenverfahrens sei hier nur die Bestimmung der Elektronenwinkelverteilung hinter und vor der durchstrahlten Folie (z. B. in Abhängigkeit vom Energieverlust, von der Einfallsenergie, dem Einfallsinkel, der Foliendicke usw.) erwähnt.

Weiters fällt es nicht schwer, das Verfahren auf das Problem einer β -Strahlung emittierenden Folie zu erweitern.

Im ersten Abschnitt der Arbeit entwickeln wir die Kinematik des Vielfachstreuvganges. Im zweiten Abschnitt geben wir die verwendeten Einzelstreuquerschnitte für die Elektron-Atomstreuung an. Im dritten Teil schließlich stellen wir die Anwendung der Monte-Carlo-Methode auf unser Problem dar, definieren die uns interessierenden mittleren Winkel und fassen die Resultate zusammen.

1. Kinematik

Für die analytische Auswertung aller Stöße, die das einfallende Elektron bis zum Verlassen der Folie erleidet, benötigen wir ein festes, und soviele, sich mit dem Elektronenstrahl mitdrehende Koordinatensysteme, als es Zusammenstöße dieses Elektrons mit den Atomen der Folie gibt.

Das feste Koordinatensystem: Der Ursprung ist der Eintrittspunkt des Elektrons in die Folie, seine z -Richtung ist die Einfallsrichtung dieses Elektrons. In der EinfallsEbene liegt senkrecht zur z -Richtung auf der Einfallsseite die x -Richtung. Alle Koordinatensysteme sollen Rechtssysteme sein.

Die beweglichen Koordinatensysteme: Das erste von ihnen hat den Ursprung im ersten wirksamen Streuzentrum. Seine z -Richtung ist die neue, nach der Streuung bestehende Bewegungsrichtung des gestreuten Elektrons. Seine x - und y -Richtung liegen so, daß dieses Koordinatensystem durch Rückdrehung um den Streuwinkel bzw. das Azimut in das feste Koordinatensystem (nach Parallelverschiebung) übergeht.

Jedes weitere bewegliche Koordinatensystem wird analog definiert. Ursprung ist das nächste wirksame Streuzentrum, z -Richtung ist die neue Bewegungsrichtung nach dem Stoß. x - und y -Richtung seien wieder so definiert, daß dieses Koordinatensystem durch Rückdrehung um Streuwinkel und Azimut

und Parallelverschiebung in das unmittelbar vorangehende bewegliche Koordinatensystem übergeht.

Größen im festen Koordinatensystem werden ungestrichen, Größen in den beweglichen Koordinatensystemen werden gestrichen bezeichnet. Der untere Index gibt die Ordnungszahl des Stoßes an. Demgemäß sind z. B. x_n, y_n, z_n die Koordinaten des n -ten Stoßzentrums, ϑ_n, Φ_n die Richtungen des Elektrons nach dem n -ten Stoß im festen, ϑ'_n, Φ'_n diese Richtungen im $(n-1)$ -ten beweglichen System. Größen, die vom System unabhängig sind, z. B. die Wege zwischen dem n -ten und $(n+1)$ -ten Stoß, s_n , werden ebenfalls ungestrichen bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen dem $(n-1)$ -ten, dem n -ten beweglichen und dem festen Koordinatensystem kann über die bekannte Drehformel

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* \cos \Phi'_n + (\mathbf{e} \times \mathbf{r}^*) \sin \Phi'_n + \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}^*) (1 - \cos \Phi'_n) \quad (1)$$

hergestellt werden.

Dabei bedeuten:

$$\mathbf{e} = (\sin \vartheta_{n-1} \cos \Phi_{n-1}, \sin \vartheta_{n-1} \sin \Phi_{n-1}, \cos \vartheta_{n-1})$$

den Einheitsvektor der Bewegungsrichtung nach dem $(n-1)$ -ten Stoß, bezogen auf das ruhende Koordinatensystem,

$$\mathbf{r}^* = (\sin(\vartheta_{n-1} + \vartheta'_n) \cos \Phi_{n-1}, \sin(\vartheta_{n-1} + \vartheta'_n) \sin \Phi_{n-1}, \cos(\vartheta_{n-1} + \vartheta'_n))$$

den um den Streuwinkel ϑ'_n in der Ebene \mathbf{e} , z gedrehte Vektor \mathbf{e} und

$$\mathbf{r} = (\sin \vartheta_n \cos \Phi_n, \sin \vartheta_n \sin \Phi_n, \cos \vartheta_n)$$

den um das Azimut Φ'_n um \mathbf{e} als Drehachse gedrehte Vektor \mathbf{r}^* .

Die komponentenweise Auswertung der Formel (1) ergibt den gesuchten Zusammenhang zwischen ϑ_n, Φ_n einerseits und $\vartheta'_n, \Phi'_n, \vartheta_{n-1}, \Phi_{n-1}$ andererseits:

$$a) \sin \vartheta_n \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \cos \Phi_n = 1 / \sin \vartheta_n [& - \sin \vartheta'_n \cdot \sin \Phi'_n \cdot \sin \Phi'_{n-1} \\ & + (\cos \vartheta_{n-1} \cdot \sin \vartheta'_n \cos \Phi'_n \\ & + \sin \vartheta_{n-1} \cos \vartheta'_n) \cos \Phi'_{n-1}], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin \Phi_n = 1 / \sin \vartheta_n [& \sin \vartheta'_n \cdot \sin \Phi'_n \cos \Phi'_{n-1} \\ & + (\cos \vartheta_{n-1} \sin \vartheta'_n \cos \Phi'_n \\ & + \sin \vartheta_{n-1} \cos \vartheta'_n) \sin \Phi'_{n-1}], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_n = - \sin \vartheta_{n-1} \sin \vartheta'_n \cos \Phi'_n \\ + \cos \vartheta_{n-1} \cos \vartheta'_n; \end{aligned} \quad (4)$$

$$b) \sin \vartheta_n = 0.$$

Dann wird je nach Bewertungsrichtung $\cos \vartheta_n = \pm 1$ gesetzt; ferner $\cos \Phi_n = 1$, $\sin \Phi_n = 0$.

Die Projektionen des Weges s_n in die z - bzw. x -Richtung betragen:

$$s_n \cos \vartheta_n \quad \text{bzw.} \quad s_n \cdot \sin \vartheta_n \cdot \cos \Phi_n.$$

Daher ist

$$z_{n+1} = z_n + s_n \cdot \cos \vartheta_n, \quad (5)$$

$$x_{n+1} = x_n + s_n \cdot \sin \vartheta_n \cdot \cos \Phi_n. \quad (6)$$

Mit Hilfe des Einfallswinkel φ des Elektrons und der Dicke D der Folie definieren wir nun die Kriterien für das Verlassen der Folie durch das Elektron.

Für die Elektronen, die nach dem n -ten Stoß reflektiert werden, gilt:

$$z_{n+1} \cdot \cos \varphi - x_{n+1} \cdot \sin \varphi < 0 \leq z_n \cos \varphi - x_n \sin \varphi. \quad (7)$$

Für Elektronen, die nach dem n -ten Stoß die Folie durchsetzt haben:

$$z_n \cdot \cos \varphi - x_n \cdot \sin \varphi \leq M < z_{n+1} \cos \varphi - x_{n+1} \sin \varphi. \quad (8)$$

Elektronen, die eine gegebene Anzahl von Stößen überschreiten, ehe sie reflektiert werden, bzw. die Folie durchsetzt haben, und solche Elektronen, die einen zu großen Energieverlust in der Folie erleiden, werden durch das Programm ausgeschieden.

2. Dynamik

Die Stöße werden zunächst nach der Größe des Streuwinkels in Kleinwinkel- und Großwinkelstöße eingeteilt.

Kleinwinkelstöße

Beträgt der Streuwinkel $\vartheta \leq 0,2$, so sprechen wir von Kleinwinkelstößen. Für diesen hat MOLIÈRE¹⁰ den differentiellen Wirkungsquerschnitt unter Berücksichtigung der Kernabschirmung für elastische Stöße berechnet:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} = Z(Z+1) r_e^2 \left[\frac{T+1}{T(T+2)} \right]^2 \frac{2 \pi \cdot \sin \vartheta}{(1+\vartheta_a^2/2-\cos \vartheta)^2}. \quad (9)$$

wobei

$$\vartheta_a^2 = \frac{6,8 \cdot Z^{2/3} \cdot 10^{-5}}{T(T+2)} \left[1,13 + 2 \cdot 10^{-4} Z^2 \frac{(T+1)^2}{T(T+2)} \right]. \quad (10)$$

¹⁰ G. MOLIÈRE, Z. Naturforsch. **2a**, 133 [1947].

¹¹ U. FANO, Phys. Rev. **93**, 117 [1954].

Es bedeuten: Z die Kernladungszahl der Atome der Folie, T die kinetische Energie des stoßenden Elektrons mit der Einheit $m_0 c^2$ = Ruheenergie des Elektrons, ϑ den Streuwinkel, ϑ_a den Abschirmwinkel, $r_e = e^2/m_0 c^2 = 2,81718 \cdot 10^{-13}$ cm den klassischen Elektronenradius.

ϑ_a^2 , Formel (10), ist z. B. für Aluminium im Energiebereich $0,2 \leq T \leq 2$ im wesentlichen $k_1 Z^{2/3}/T(T+2)$, wobei der Faktor k_1 um weniger als 6% schwankt ($k_1 \sim 8 \cdot 10^{-5}$).

FANO¹¹ berücksichtigt auch unelastische Stöße durch Multiplikation des Wirkungsquerschnittes mit dem Faktor

$$1 - \frac{1}{(Z+1) \ln \vartheta_a^2} \cdot \left\{ 5,8 + \ln \left[0,16 Z^{-2/3} \left(1 + \frac{3,33 Z(T+1)}{137 \sqrt{T(T+2)}} \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Der Faktor ist im wesentlichen

$$\left(1 - \frac{k_2}{(Z+1) \ln \vartheta_a^2} \right) \sim 1,02,$$

wobei unter gleichen Voraussetzungen wie vorhin der Faktor k_2 um ca. 7% schwankt, wodurch der Faktor (11) um weniger als 5% variiert. Er beträgt in unserem Fall $k_2 = 2,6$. Die Faktoren k_1 , k_2 werden daher als konstant aufgefaßt.

Für den Energieverlust des einfallenden Elektrons pro Längeneinheit (1 g/cm^2) gilt nach BETHE und LIVINGSTONE¹²

$$V = 0,300 \frac{Z}{A} \left\{ \frac{(T+1)^2}{T(T+2)} \ln \left[\frac{0,1}{I^2} T^2 (T+2) \right] - 1 \right\}. \quad (12)$$

Es bedeuten: A das Atomgewicht, I das mittlere Ionisationspotential; in der Rechnung wurde dafür der Bethesche Wert $I = 0,000292$, das entspricht etwa 150 eV, angenommen.

Großwinkelstöße

Beträgt der Streuwinkel $\vartheta > 0,2$, so sprechen wir von Großwinkelstößen. Für diese Stöße betrachten wir zwei Möglichkeiten:

a) Elastische Stöße am (nicht abgeschirmten) Kernfeld. Da diese Stöße sich hauptsächlich in Kernnähe abspielen, spielt die Abschirmung des Kernfeldes durch die Hüllenelektronen keine wesentliche Rolle. Daher wird mit dem nicht abgeschirmten Kernfeld gerechnet.

¹² M. S. LIVINGSTONE u. H. A. BETHE, Rev. Mod. Phys. **9**, 245 [1937].

b) Unelastische Stöße an den Z-Hüllenelektronen. Die Stöße a) nennen wir kurz Mott-Stöße, die Stöße b) Møller-Stöße. Bei letzteren ist mit dem Auftreten von Sekundärelektronen zu rechnen, weil die bei diesen Stößen übertragene Energie nach dem Impulssatz im Durchschnitt mindestens ($\vartheta = 0,2$):

$$\frac{1}{2} T(T+2) \vartheta^2 \quad (13)$$

beträgt, was bei $T = 0,4$ um rund 2 Zehnerpotenzen über der durchschnittlichen Bindungsenergie der Hüllenelektronen (~ 150 eV) liegt und um fast eine Zehnerpotenz über der maximalen ($< 1,6$ keV). Nimmt man also den Stoß zwischen dem inzidierenden Elektron und dem Hüllenelektron als elastisch, und daher die Hüllenelektronen als frei an, so besteht nach den relativistischen Stoßgesetzen im Laborsystem die Beziehung

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{2Q}{T(T+2-Q)}}. \quad (14)$$

Demgemäß ist die untere Grenze der Energieübertragung für Møller-Stöße ($\vartheta = 0,2$) ohne Berücksichtigung der Bindungsenergie

$$Q_0 = \frac{0,02 T(T+2)}{1+0,02 T} \sim \frac{T(T+2) 0,2^2}{2}. \quad (15)$$

Für die Mott-Stöße gilt die Formel von MOTT¹³ mit der Korrektur der Spinwechselwirkung in zweiter Bornscher Näherung nach MCKINLEY und FESHBACH (l. c.¹⁴):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = Z^2 g_1(T) \left[\frac{1}{y^3} + \frac{Z g_2(T)}{y^2} - \frac{Z g_2(T) + g_3(T)}{y} \right] (\text{barn}). \quad (16)$$

Es bedeuten:

$$\begin{aligned} y &= \sin \vartheta/2, \quad g_1(T) \\ &= 0,49866 \left(\frac{T+1}{T(T+2)} \right)^2 g_2(T) = 0,0229 \frac{\sqrt{T \cdot T+2}}{T+1}, \\ g_3(T) &= \frac{T(T+2)}{(T+1)^2}. \end{aligned}$$

Für Møller-Stöße¹⁵ ergibt sich im Laborsystem unter Berücksichtigung des Austausches, der Vernachlässigung der Bindungsenergie und der Interferenz der von den einzelnen Hüllenelektronen ausgehenden Streuwellen:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dy} &= Z k_1(T) \left[\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(1-y)^2} + k_2(T) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_3(T)}{y(1-y)} \right] (\text{barn}). \end{aligned} \quad (17)$$

¹³ F. MOTT, Proc. Roy. Soc. London A **135**, 429 [1932].

¹⁴ W. A. MCKINLEY u. H. FESHBACH, Phys. Rev. **74**, 1759 [1948].

Es bedeuten:

$$\begin{aligned} k_1(T) &= 0,49866 \frac{(T+1)^2}{T^2(T+2)}, \quad k_2(T) = \left(\frac{T}{T+1} \right)^2, \\ k_3(T) &= \frac{2T+1}{(T+1)^2}, \quad y = Q/T. \end{aligned}$$

Sekundärelektronen

Bei der Bildung von Sekundärelektronen vernachlässigen wir wieder die Bindungsenergie. Dann sind der Streuwinkel ϑ_s und das Azimut Φ_s eines Sekundärelektrons Funktionen der Daten des Primärelektrons: $\vartheta_p, \Phi_p, T_p; T = T_p + T_s$

$$\sin \vartheta_s = \sqrt{\frac{T_p(T_p+2)}{T_s(T_s+2)}} \sin \vartheta_p, \quad (18)$$

$$\cos \vartheta_s = \sqrt{\frac{T(T+2)}{T_s(T_s+2)}} - \sqrt{\frac{T_p(T_p+2)}{T_s(T_s+2)}} \cdot \cos \vartheta_p, \quad (19)$$

$$\sin \Phi_s = -\sin \Phi_p, \quad (20)$$

$$\cos \Phi_s = -\cos \Phi_p. \quad (21)$$

3. Anwendung der Monte-Carlo-Methode

Es sei eine zufällige Veränderliche τ , $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ nach der Verteilungsfunktion $f(\tau)$ verteilt. Ferner sei eine große Anzahl gleichverteilter Zufallszahlen x , $0 \leqq x \leqq 1$ gegeben. Gesucht ist die eineindeutige Zuordnung zwischen x und τ : $\tau(x)$. Definitionsgemäß ist $f(\tau)$ proportional der Häufigkeit, mit der τ in das Intervall $d\tau$ fällt, $d\tau$ ist proportional der in das Intervall dx hineinfallenden Zufallszahlen x . Da die Zuordnung $\tau(x)$ eineindeutig sein sollte, so muß gelten:

$$f(\tau) d\tau = k dx$$

bzw. integriert:

$$\int_{\tau_1}^{\tau} f(\tau') d\tau' = k x, \quad \text{wenn } x(\tau_1) = 0 \text{ und } x(\tau) = x$$

sind. — Dabei ist der Proportionalitätsfaktor k durch die Bedingung bestimmt ($\tau = \tau_2$)

$$k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau') d\tau'.$$

d. h., $k = 1$, wenn $f(\tau)$ normiert ist.

Die gesuchte Zuordnung $\tau(x)$ wird durch Auflösung der Gleichung

$$\int_{\tau_1}^{\tau} f(\tau') d\tau' = k x \quad (22)$$

¹⁵ C. MØLLER, Z. Phys. **70**, 786 [1931].

nach der oberen Grenze der linken Seite τ gefunden: $\tau = \tau(x)$.

Es sei nun $f(s) ds$ die Wahrscheinlichkeit, daß auf dem Wegstück s bis $s+ds$ ein Stoß zwischen dem Elektron und einem Streuzentrum stattfindet. Ferner seien σ der Wirkungsquerschnitt für Stöße, N die Anzahl der Streuzentren pro cm^3 , ϱ die Dichte des Materials in g/cm^3 . Dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß auf dem Weg s :

$$\int_0^s f(s') ds' = 1 - e^{-N\sigma s/\varrho}. \quad (23)$$

Daher ergibt sich nach (22) für die Zufallszahl x , $0 \leq x \leq 1$:

$$s(x) = \frac{\varrho}{N\sigma} \ln \frac{1}{1-x}. \quad (24)$$

Für Kleinwinkelstöße ergibt sich der Wirkungsquerschnitt σ_{KL} aus den Formeln (9) – (11), wobei über den Streuwinkel von 0 bis 0,2 zu integrieren ist:

$$\sigma_{KL} = 0,99732 Z(Z+1) \left(\frac{T+1}{T(T+2)} \right)^2 \cdot \frac{0,04}{\vartheta_a^2(0,04+\vartheta_a^2)} \left(1 - \frac{2,6}{(Z+1) \ln \vartheta_a^2} \right) (\text{barn}). \quad (25)$$

Für Mott-Stöße ist die Formel (16) von 0,1 bis 1 zu integrieren:

$$y = \sin \Theta/2, \quad \sigma_{MOTT}(y) = -Z^2 g_1(T) \left[\frac{0,5}{y^2} + \frac{Z g_2(T)}{y} + (Z g_2(T) + g_3(T)) \ln y \right] \quad (26)$$

$$(\sigma_{MOTT}(1) - \sigma_{MOTT}(0,1)) \quad x = \sigma_{MOTT}(y) - \sigma_{MOTT}(0,1). \quad (27)$$

Für Møller-Stöße ist Formel (17) von der durch Formel (15) gegebenen unteren Grenze Q_0/T bis 0,5 zu integrieren:

$$y = Q/T, \quad \sigma_{MOLL}(y) = Z k_1(T) \left[-\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} + k_2(T) y - k_3(T) \ln \frac{y}{1-y} \right] \quad (28)$$

$$\sigma_{MOLL}(y) - \sigma_{MOLL}(Q_0/T) = x (\sigma_{MOLL}(0,5) - \sigma_{MOLL}(Q/T)). \quad (29)$$

Um Primär- und Sekundärelektronen zu unterscheiden, wurde der Energieverlust $Q \leq T/2$ gesetzt.

Am Ende des Weges s möge nun im Intervall $s, s+ds$; $\vartheta, \vartheta+d\vartheta$ ein Kleinwinkelstoß erfolgen. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$\frac{2\pi N}{\varrho} \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} d\vartheta ds. \quad (30)$$

Benützen wir wieder Formel (22), so erhalten wir zwischen der Zufallszahl x , $0 \leq x \leq 1$ und dem Streuwinkel ϑ die Zuordnung

$$\int_0^{\vartheta(x)} \frac{2 \vartheta d\vartheta}{(\vartheta^2 + \vartheta_a^2)^2} = x \int_0^{\vartheta_a} \frac{2 \vartheta d\vartheta}{(\vartheta^2 + \vartheta_a^2)^2}, \quad (31)$$

woraus sich durch Auflösung nach $\vartheta(x)$ ergibt:

$$\vartheta(x) = \vartheta_a \sqrt{\frac{0,04 x}{\vartheta_a^2 + 0,04(1-x)}}. \quad (32)$$

Für Kleinwinkelstöße wird der Energieverlust gemäß Formel (12) berechnet, für Møller-Stöße gemäß Formel (14). Bei Mott-Stößen tritt kein Energieverlust auf, da wir den Kern als unendlich träge annehmen.

Die mittleren Austrittswinkel

Um die Beeinflussung der Bewegungsrichtung des Elektronen-Kollektivs durch die Folie bei Transmission bzw. Reflexion durch je eine Zahl zu beschreiben, definieren wir nun den „mittleren Brechungswinkel“ Θ_T und den „mittleren Reflexionswinkel“ ϑ_R : (Θ_{TM} , Θ_{RM} sind die entsprechenden Winkel für Elektronen mit Møller-Stoß).

Jedem die Folie verlassenden Elektron, sei es auf der Transmissions- oder auf der Reflexionsseite, werde der Einheitsvektor in der Bewegungsrichtung zugeordnet: \mathbf{W}_1 . Getrennt für Reflexion und Transmission mögen nun die Vektorsummen über diese Einheitsvektoren gebildet werden:

$$\sum \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_{R,T}. \quad (33)$$

Der Winkel zwischen \mathbf{W}_R und dem Einfallsslot ist der „mittlere Reflexionswinkel“ ϑ_R . Der Winkel zwischen dem Einfallslot und \mathbf{W}_T ist der „mittlere Brechungswinkel“ Θ_T . Die Abweichung von \mathbf{W}_T von der ursprünglichen Bewegungsrichtung ist demgemäß $\varphi - \vartheta_T$. Die Ablenkung $\psi - \Theta_T$ ist positiv bei Brechung zum Lot, negativ bei Brechung vom Lot.

Messung der mittleren Austrittswinkel

Die Eintrittsstelle der Elektronen in die Folie kann als ein Punkt aufgefaßt werden. Die Austrittsstellen können wegen der geringen Dicke der Folie mit diesem Punkt identifiziert werden. Dieser Punkt wird nun mit einem Strahlungsdetektor sowohl auf der Transmissions- als auch auf der Reflexionsseite in gleichmäßig verteilten Richtungen angepeilt. In jede dieser Richtungen legen wir einen Vektor \mathbf{W}_z , dessen Betrag proportional der Zählrate in dieser

Richtung sei. Nun bilden wir getrennt für Transmission und Reflexion die Summen

$$\sum \mathbf{W}_z = \mathbf{W}_{R,T} \quad (33 \text{ a})$$

und definieren wie oben die „mittleren Austrittswinkel“. Durch Variieren der Diskriminatorschwellen können die „mittleren Austrittswinkel“ zum Energieverlust in Beziehung gesetzt werden.

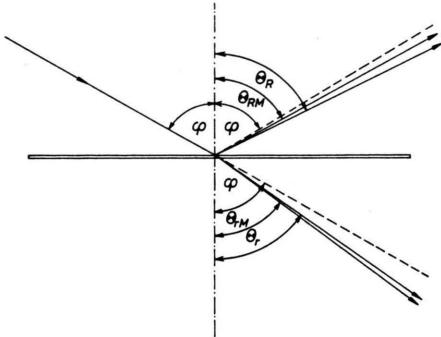


Abb. 1. Elektronenstreuung an dünnen Al-Folien (Erläuterung siehe Text).

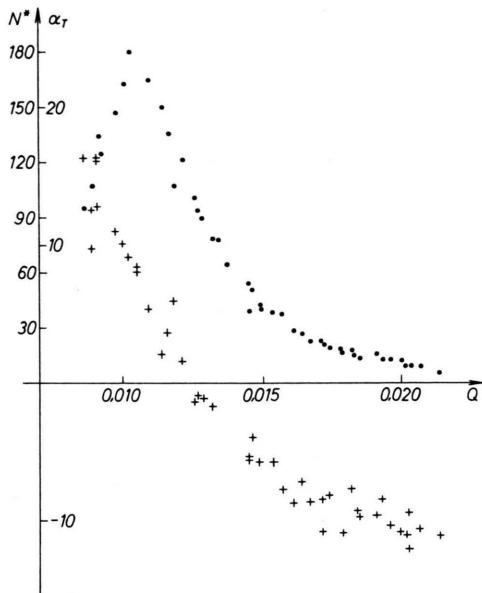


Abb. 2. Ohne Møller-Stoß: Ablenkung $\alpha = (\varphi - \Theta_T)^\circ$ + + + und relative Anzahl N^* · · · · · als Funktionen des Energieverlustes Q (Erläuterung siehe Text).

Zur experimentellen Unterscheidung der Elektronen mit und ohne Møller-Stoß ist zu bemerken, daß die Elektronen der ersten Gattung einen wesentlich größeren mittleren Energieverlust haben als die der zweiten Gattung (siehe Tabelle). Ferner gilt zumindestens für die transmittierenden Elektronen, daß

sich die der ersten Gattung von denen der zweiten wesentlich hinsichtlich der durchschnittlichen Richtung unterscheiden, sobald ihre Energieverluste von vergleichbarer Größe sind. Wie Abb. 2 zeigt, haben die Elektronen der zweiten Gattung unter dieser Voraussetzung durchschnittlich eine negative Ablenkung $\varphi - \Theta$, während gemäß Abb. 1 für Elektronen der ersten Gattung diese Ablenkung positiv ist. Mithin ist die experimentelle Unterscheidung der beiden Elektronengattungen (ohne Beobachtung der einzelnen Stoße) durch Messung von Richtung und Energieverlust für transmittierende Elektronen gut durchführbar.

4. Zusammenfassung der Resultate

Vorausgeschickt sei, daß nur Elektronen mit einer Energie $T \geq 0,1$ und einer Stoßzahl ≤ 500 gezählt werden. Durch diese Bedingungen gehen 0,2% Primärelektronen verloren.

Bei einem Einfallswinkel von $\varphi = 60^\circ$ und einer Energie $T_0 = 0,4$ ergaben sich nach Durchspielen von 24 000 Elektronenschicksalen in 12 Teilserien zu je 2000, bei einer Dicke der Aluminiumfolie $D = 0,0015 \text{ g/cm}^2$, nachstehende Resultate.

a) Gemittelt über alle Elektronenschicksale (in Klammer steht das größte und kleinste Ergebnis der 12 Teilserien) :

		Anzahl %	Energie- Verlust %	mittl. Austrittsw. (Grad)
ohne Møller- Stöße	Transm.	88,6 (87,4–89,7)	3,27 (3,24–3,37)	55,6 (55,2–55,9)
	Reflex.	6,5 (5,8–7,1)	7,4 (7,2–7,9)	64 (62,2–65,7)
mit Møller- Stößen	Transm.	4 (3,2–4,7)	18 (14,8–21,6)	54 (50,2–56,8)
	Reflex.	1 (0,6–1,7)	24,6 (21,7–33,8)	61,9 (55,7–67,2)

Zu den Elektronen mit Møller-Stoßen zählen wir auch die Sekundärelektronen (0,3%). Den aus der Tabelle hervorgehenden „Dreheffekt“ zum Einfallslot für transmittierende Elektronen zeigt Abb. 1.

b) Detailliert nach Energieverlust-Intervallen für Elektronen, die ohne Møller-Stoße durch die Folien gehen:

b1) Bezüglich der Anzahl (Abb. 2) :

Wenn wir die relative Anzahl $\Delta N/N_0$ ($N_0 = \sum \Delta N$) der ohne Møller-Stoße hindurchgehenden Elektronen, für die der Energieverlust Q

in ein bestimmtes Energieintervall fällt, durch die Breite dieses Intervalls dividieren:

$$N^* = \frac{1}{N_0} \frac{\Delta N}{\Delta Q}$$

und wenn wir N^* gegen den Energieverlust Q in der Mitte des Energieintervalls auftragen, so erhalten wir eine Poisson-ähnliche Verteilung.

- b2) Bezuglich des „mittleren Brechungswinkels“ (Abb. 2):

Analog b1) tragen wir $\varphi - \Theta_T$ gegen Q auf: Bei kleinem Energieverlust erfolgt im Mittel Brechung zum Lot, bei großem Brechung vom Lot.

Das Programm, das für 12 Kombinationen aus Einfallswinkel, Energie und Foliendicke eingerichtet ist, wurde auf einer IBM 7040/32 K in etwa 12 h gerechnet. Wenn mit maximal 5% Sekundärelektronen gerechnet wird, werden 11 158 Speicherplätze benötigt.

Die Verfasser danken herzlich dem Leiter des Recheninstituts der Technischen Hochschule Wien, Prof. Dr. H. J. STETTER, für die Erlaubnis, die umfangreichen Rechnungen durchführen zu dürfen. Das Programm steht Interessenten jederzeit zur Verfügung.

Messungen der Elektronenbeweglichkeit bei hohen Gasdrucken in Ar, He, N₂ und H₂ *

R. GRÜNBERG

Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforsch. 23 a, 1994—2004 [1968]; eingegangen am 23. September 1968)

By means of a time of flight method the electron drift velocity v_- in argon, helium, nitrogen, and hydrogen was determined as function of E/p [V/Torr cm] at room temperature and for high pressure up to 42 at, at which no measurements were as yet available. In He and H₂ E/p was decreased to that range where the electrons are in thermal equilibrium with the gas. In N₂ measurements were extended nearly to this range, and in Ar measurements were carried out for E/p well above this range of thermal equilibrium.

The accuracy from 1% to 1.5% in the available pressure range enabled an examination of the similarity rule. For the diatomic gases N₂ and H₂ the measurements show that for constant E/p , in the range $E/p < 1$, the drift velocities decrease with increasing pressure. This effect was not found in Ar. In He no effect was found in the pressure range up to 8400 Torr (or it lies within the limits of error).

Mittels einer Laufzeitmethode wird die Elektronendriftgeschwindigkeit v_- von Ar, He, N₂ und H₂ bei Zimmertemperatur und hohem Druck (1...42 at) bestimmt, bei welchem bisher keine Messungen vorliegen. Die Messungen erstrecken sich im wesentlichen auf den E/p -Bereich, in dem keine Gasverstärkung vorliegt und reichen für He und H₂ herunter bis zu E/p -Werten, für die die Elektronen das thermische Gleichgewicht mit dem Gas erreichen; für N₂ reichen sie fast an diesen Bereich heran. Das Ziel dieser Untersuchung war es, die über einen großen Druckbereich erreichbare Genauigkeit von 1% bis 1,5% zur Prüfung des Ähnlichkeitsgesetzes auszunutzen, das im Niederdruckbereich für den hier untersuchten E/p -Bereich bisher von allen Autoren be-

stätigt worden ist (siehe Diskussion). Danach soll die Driftgeschwindigkeit nur von E/p und nicht von p abhängen. Wie die Messungen zeigen, liegen in N₂ und H₂ bei hohem Druck jedoch Abweichungen vom Ähnlichkeitsgesetz vor. Eine vorläufige Mitteilung erschien in¹.

1. Meßmethode

a) Prinzip des Verfahrens und einige experimentelle Einzelheiten

Die Elektronen driften im homogenen elektrischen Feld, das von einem Plattenkondensator (90° — bzw. 120° — Rogowski-Profil) erzeugt wird.

* Gekürzte Fassung des ersten Teils der Dissertation, Universität Hamburg 1968.

¹ R. GRÜNBERG, Z. Phys. 204, 12 [1967].